Verifica intermedia delle conoscenze acquisite di[1]
Analisi Matematica I
Aprile 2023

Esercizio n. 1 (Numeri complessi).

Risolvere le seguenti equazioni in campo complesso:

$$(\mathbf{a}) \quad iz^2 - 3(1+i)z + 3 - 3i = 0 \quad , \quad (\mathbf{b}) \quad z^3 - 6iz^2 - 12z + 6i = 0 \; .$$

Determinare poi l'insieme

$$A = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = \Re e\, z, \; \Im m\, \frac{z-1}{z+2} = \Re e\, \frac{z+2}{z-1} - 1 \} \; .$$

Esercizio n. 2 (Successioni di numeri reali).

Determinare il limite delle seguenti successioni:

$$(\mathbf{a}) \quad \left\{ -6n^2 \left[\left(1 + \frac{2}{n^2} \right)^3 - 1 \right] \right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \quad , \quad (\mathbf{b}) \quad \left\{ \frac{(6n)!}{(5n)!^2} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \; ,$$

$$(\mathbf{c}) \quad \left\{ 2n^2 + \sqrt[3]{3 - 2n + 4n^2 - 5n^3 + 4n^4 - 8n^6} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \; .$$

Esercizio n. 2 (Serie di numeri reali).

Studiare il comportamento delle seguenti serie numeriche:

$$(\mathbf{a}) \quad \sum_{n \geq 1} \left[\left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/n} - \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/(n+1)} \right] \quad , \quad (\mathbf{b}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^6 - 64n^6}{5n^5} \; ,$$

$$(\mathbf{c}) \quad \sum_{n \geq 1} \sqrt[5]{\tan^2 \frac{1}{n}} \; .$$

Esercizio n. 4 (Limiti di funzione).

Calcolare i seguenti limiti di funzioni e, quando possibile, esibire la loro soluzione senza l'uso dei teoremi di de l'Hôpital:

$$(\mathbf{a}) \quad \lim_{x \to -1} \frac{x|\sin(x+1)|}{x+1} \quad , \quad (\mathbf{b}) \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x^2} - 1}{1 - \sin^2 x - e^{x^2}} \; ,$$

[1] Fornire spiegazioni esaurienti alle soluzioni date.

$$(\mathbf{c}) \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(x^{7/2} - 2\sin^4 x\,\log^{7/2} x\right)\ .$$

Esercizio n. 5 (Derivabilità e derivata di una funzione).

(A) Determinare il dominio delle funzioni

$$f(x) = (5x+6)^{5/6} \quad , \quad g(x) = \left|\frac{x-2}{x+2}\right|^x$$

e stabilire, con conti espliciti, se esse hanno punti di non derivabilità.

(B) Verificare se la seguente funzione è di classe C^2 nel suo dominio

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2)}{x} + 2x & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0\ . \end{cases}$$

determinando, in caso affermativo, le funzioni derivata prima e seconda.